Exponentialfunktionen

(Pandemie aus mathematischer Sicht)

Wolfgang Kippels

9. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Grundlagen zu Exponentialfunktionen **2**

3 Wichtige Kenngrößen einer Exponentialfunktion **4**
3.1 Halbwertzeit 4
3.2 Verdopplungszeit 5
3.3 Reproduktionsfaktor 6

4 Beispiele **9**
4.1 Beispiel 1 9
4.2 Beispiel 2 11
4.3 Beispiel 3 12
4.4 Beispiel 4 12
4.5 Beispiel 5 13
4.6 Ein Beispiel aus einem anderen Bereich 14

1 Einleitung

Am Beispiel der Corona-Pandemie im Frühjahr 2020 sollen die besonderen Merkmale von Exponentialfunktionen dargestellt werden.

2 Grundlagen zu Exponentialfunktionen

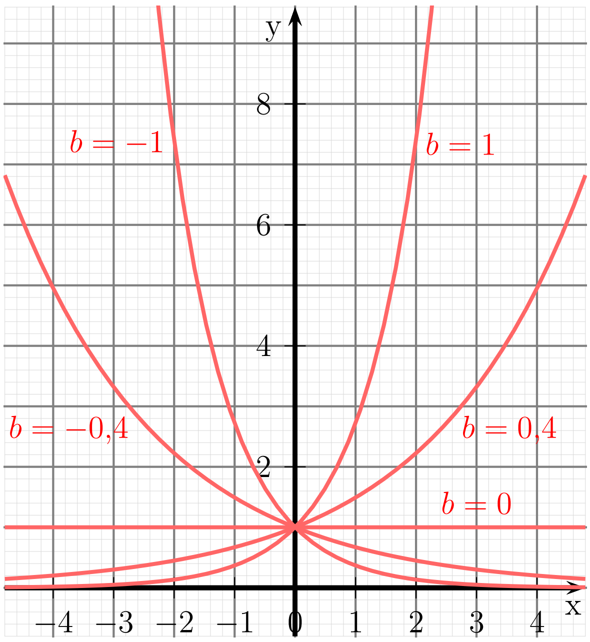
Eine **Exponentialfunktion** ist eine Funktion, bei der die unabhängige Variable als **Exponent** vorkommt. Die Normalform lautet:

$$f(x) = a \cdot e^{bx} + c$$

Hierbei ist $\boldsymbol{e}$ die Eulersche Zahl[1] mit $e \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045$.

Nebenstehend sind fünf Funktionsgraphen dargestellt. Bei allen Funktionen ist $a = 1$ und $c = 0$. Nur die b-Werte unterscheiden sich.

$f_1(x) = e^{1x}$
$f_2(x) = e^{0{,}4x}$
$f_3(x) = e^{0x}$
$f_4(x) = e^{-0{,}4x}$
$f_5(x) = e^{-1x}$



Schaut man sich die zugehörigen Funktionsgraphen an, dann sollte auffallen, dass die Kurven auf der rechten Seite immer steiler nach oben verlaufen, sobald b positiv ist. Man sagt:„*Die Funktion **divergiert** für $x \to \infty$.*“

Bei negativem b kommen die Kurven von links oben und nähern sich im Verlauf nach rechts der x-Achse immer mehr an. Man sagt:„*Die Funktion **konvergiert** für $x \to \infty$.*“

Ist dagegen $b = 0$, dann erhalten wir eine waagerechte Gerade in der Höhe 1.

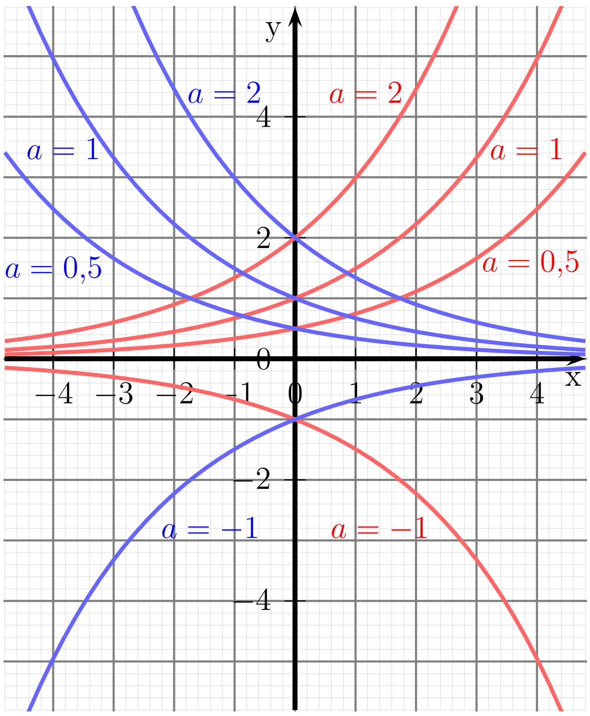
Was bedeutet das? Wenn wir in der Praxis irgendwo einen zeitlichen Zusammenhang haben, der einer exponentionellen Funktion folgt, dann ist das Vorzeichen von b ganz entscheidend. Bei positivem b steigen die Funktionswerte irgendwann explosionsartig an, entweder in den positiven oder in den negativen Bereich. Im Beispiel einer Pandemie gibt

[1]Die Eulersche Zahl ist definiert als $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$. Wer damit nichts anfangen kann, dem sei gesagt, dass e eine besondere mathematische Zahl ist, wie auch die Kreiszahl π. Zum Verständnis an dieser Stelle reicht das völlig aus.

es zunächst nur wenige Fälle von Erkrankungen, dann werden es immer mehr und das immer schneller. Es kommt zur Katastrophe.

Bei Abklingvorgängen ist b **negativ**. Nehmen wir beispielsweise einen radioaktiven Zerfall. Man muss nur lange genug warten, dann wird die gefährliche Strahlung immer geringer, bis sie schließlich nicht mehr messbar ist. Je nachdem, um welches Element es sich dabei handelt, kann dieser Prozess allerdings auch Jahrmillionen dauern.

Auch bei einer Pandemie kann es zu einem Abklingvorgang kommen. Erwünscht ist das auf jeden Fall. Behindert man durch geeignete Maßnahmen die weitere Ausbreitung der Krankheit, dann kann es sein, dass man einen **negativen** b-Wert erhält. Dann verringert sich die Zahl der akut Erkrankten und bewegt sich Richtung Null. Im Idealfall stirbt die Krankheit dann irgendwann aus.[2]



Schauen wir uns als nächstes den Einfluss des Parameters a an. Nebenstehend sind die Funktionsgraphen dargestellt, mit $b = 0{,}4$ in rot sowie $b = -0{,}4$ in blau und $c = 0$. Der Parameter a legt mit seinem Vorzeichen fest, ob die Kurve nach oben (bei $a > 0$) oder nach unten (bei $a < 0$) „wegbiegt“. Der Fall für $a = 0$ wurde hier nicht mit eingezeichnet, das wäre eine Gerdade entlang der x-Achse.

Je größer a ist, desto steiler biegt die Kurve nach oben.

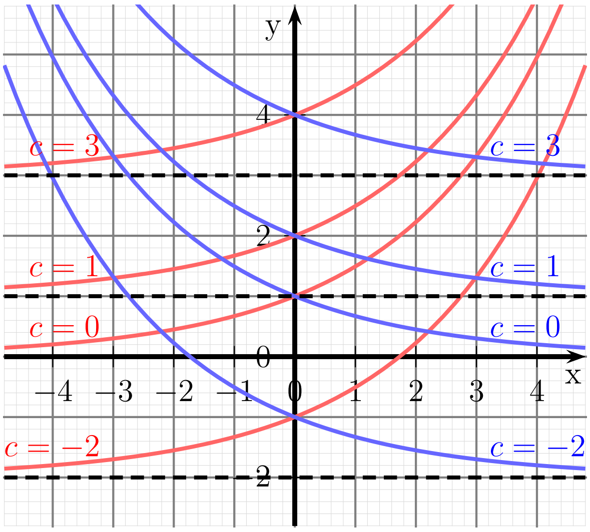
So lange $c = 0$ ist, stellt a gleichzeitig auch den y-Achsenabschnitt dar.

In dem Fall, dass $b < 0$ ist, erhalten wir die gleiche Aussage, allerdings mit dem Unterschied, dass die Kurven dann auf der linken, statt auf der rechten Seite von der x-Achse wegbiegen.

[2]Leider hat man in der Wirklichkeit niemals eine reine Exponentialfunktion. Es gibt immer eine Vielzahl von Einflüssen, die den Verlauf der Ausbreitung einer Krankheit bestimmen. Dennoch stellt die Exponentialfunktion meist eine gute Näherung dar.

Im nächsten Diagramm sind Funktionen mit einem unterschiedlichen Wert für den Parameter c dargestellt. Nebenstehend sind die Funktionsgraphen dargestellt, mit $b = 0{,}4$ in rot sowie $b = -0{,}4$ in blau und $a = 1$.

Wenn man genau hinsieht, dann kann man erkennen, dass der Parameter c den Wert angibt, zu dem die Funktionsgraphen nach links (bei positivem b) bzw. nach rechts (bei negativem b) hinstreben.



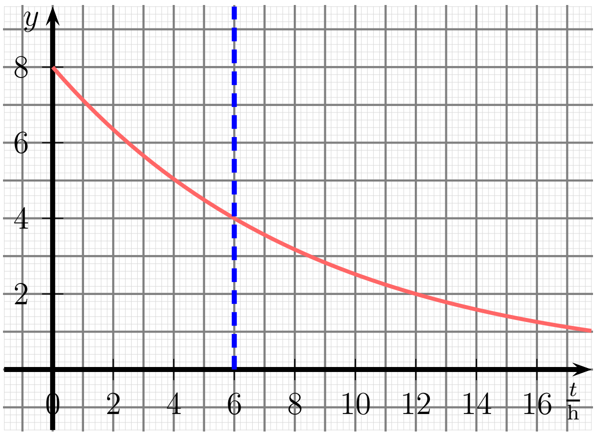
3 Wichtige Kenngrößen einer Exponentialfunktion

Bei Vorgängen, deren **zeitlicher Verlauf** durch eine Exponentialfunktion bestimmt sind, tauchen gelegentlich die Begriffe *Halbwertzeit*, *Verdopplungszeit* oder auch *Reproduktionsfaktor* auf. Diese sollen hier im einzelnen vorgestellt werden.

3.1 Halbwertzeit

Die Halbwertzeit gibt es nur bei **abklingenden** Vorgängen. Man versteht darunter die Zeit, die vergeht, bis der Funktionswert auf die Hälfte des Anfangswertes abgesunken ist.

In der Medizin wird beispielsweise für diagnostische Zwecke Technetium eingesetzt. Das meist verwendete ^{99m}Tc hat eine **Halbwertzeit** von etwa 6 Stunden. Das bedeutet, dass von einer Anfangsmenge Technetium nach 6 Stunden wegen des radioaktiven Zerfalls nur noch die Hälfte übrig ist. Bekommt der Patient ein Technetium-Präparat gespritzt, dann kann man davon ausgehen, dass nach ein paar Tagen davon nichts mehr übrig bleibt.



Im Diagramm oben ist der Zerfall von ^{99m}Tc dargetellt. Der Anfangswert bei $t = 0$ beträgt 8 Einheiten. Nach 6 Stunden ist er auf die Hälfte, also 4 Einheiten angesunken. Nach weiteren 6 Stunden (also nach insgesamt 12 Stunden) beträgt er nur noch 2 Einheiten usw. Aber auch, wenn man bei einem beliebigen anderen Zeitpunkt (etwa bei $t = 1\,\mathrm{h}$ mit 7 Einheiten) einsteigt, dann hat man 6 Stunden später nur noch den halben Funktionswert (im Beispiel bei $t = 7\,\mathrm{h}$ ist er auf 3,5 Einheiten abgesunken).

Weil die Halbwertzeit ein in der Praxis gut handhabbarer Parameter ist, wird er gern verwendet. Wie können wir nun diesen Wert in den b-Wert aus der Normalform der Funktionsgleichung umrechnen?

Die Normalform für die Exponentialfunktion mit der Zeit t als unabhängige Variable lautet:

$$f(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + c$$

Weil die Kurve für $t \to \infty$ gegen Null geht, ist der Parameter $c = 0$. Der Parameter a ist der Startwert bei $t = 0$. Wenn ich also in die Funktionsgleichung für t die Halbwertzeit t_H einsetze, dann erhalte ich als Funktionswert genau die Hälfte von a als Ergebnis. Mit diesem Ansatz kann nun b berechnet werden.[3]

$$\begin{aligned}
a \cdot e^{b \cdot t_H} &= \frac{1}{2} \cdot a && |: a \\
e^{b \cdot t_H} &= \frac{1}{2} && |\ln \ldots \\
b \cdot t_H &= \ln \frac{1}{2} && |: t_H \\
b &= \frac{\ln \frac{1}{2}}{t_H}
\end{aligned}$$

Weil $\ln \frac{1}{2} \approx -0{,}693\,147$ ein fester Wert ist, kann man diesen auch in die Formel einsetzen.

Zusammengefasst: Möchte man aus der Halbwertzeit t_H eines abklingenden Prozesses den Parameter b der Exponentialfunktion bestimmen, dann geht das mit dieser Formel:

$$\boxed{b = \frac{\ln \frac{1}{2}}{t_H} \approx \frac{-0{,}693\,147}{t_H}}$$

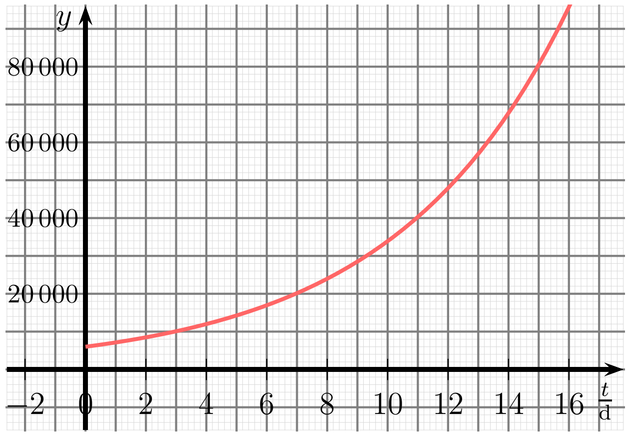
Wie man unmittelbar erkennen kann, erhält man für b einen **negativen** Wert. Das muss bei einem **abklingenden** Vorgang auch so sein.

3.2 Verdopplungszeit

Haben wir einen Vorgang mit **exponentiellem Wachstum**, dann kommt die Verdopplungszeit ins Spiel. Darunter versteht man die Zeit, in der sich der Funktionswert verdoppelt.

[3]Hier wird mit Logarithmen gerechnet. Grundlagen dazu findet man beispielsweise hier: https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/logarit.pdf

Am 17. März 2020 gab es in Deutschland etwa 6 000 Menschen, die mit dem Coronavirus infiziert waren. Damals verdoppelt sich die Zahl der Infizierten alle 4 Tage. Dieser Zusammenhang ist nebenstehend dargestellt. Man kann beispielsweise ganz gut ablesen, dass es am 3. Tag danach etwa 10 000 Infizierte geben würde, 4 Tage später (also am Tag 7) 20 000.



Die Klärung der Frage, wie aus der Verdopplungszeit t_D der Parameter b aus der Normalform der Exponentialfunktion berechnet werden kann, erfolgt analog zur vorher beschriebenen Halbwertzeit. Wir gehen zunächst davon aus, dass der Parameter $c = 0$ ist, denn bei Rückverlängerung der Kurve nach links nähert sich diese der Null an. Weiterhin gehen wir von dem Startwert a zum Zeitpunkt $t = 0$ aus. Setzt man nun für t in der Normalform der Funktionsgleichung die Verdopplungszeit t_D ein, dann ergibt sich als Funktionswert das Doppelte vom Startwert, also $2a$.

$$\begin{aligned} a \cdot e^{b \cdot t_D} &= 2 \cdot a \quad &&| : a \\ e^{b \cdot t_D} &= 2 &&| \ln \ldots \\ b \cdot t_D &= \ln 2 &&| : t_D \\ b &= \frac{\ln 2}{t_D} \end{aligned}$$

Weil $\ln 2 \approx 0{,}693\,147$ ein fester Wert ist, kann man diesen auch in die Formel einsetzen.

Zusammengefasst: Möchte man aus der Verdopplungszeit t_D eines Prozesses mit exponentiellem Wachstum den Parameter b der Exponentialfunktion bestimmen, dann geht das mit dieser Formel:

$$\boxed{b = \frac{\ln 2}{t_D} \approx \frac{0{,}693\,147}{t_D}}$$

Wie man unmittelbar erkennen kann, erhält man für b einen **positiven** Wert. Das muss bei einem Prozesses mit **exponentiellem Wachstum** auch so sein.

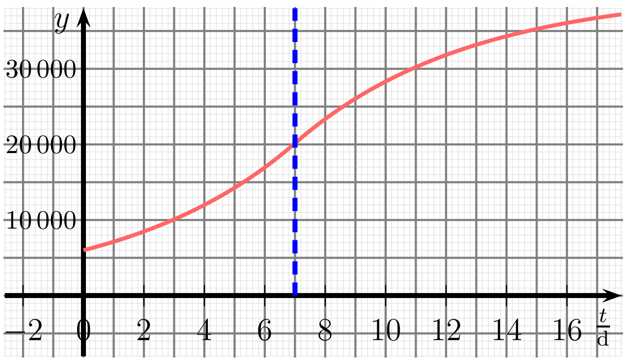
3.3 Reproduktionsfaktor

Speziell im Zusammenhang mit der Corona-Pandemie tauchte der Begriff *Reproduktionsfaktor* R auf. Darunter versteht man die Anzahl der Menschen, die ein Infizierter durchschnittlich ansteckt. Um die Sache noch etwas zu verkomplizieren unterscheidet man dabei noch zwischen dem **Grund**-Reproduktionsfaktor R_0 und dem **aktuellen** Reproduktionsfaktor R. Was aber bedeutet diese Unterscheidung?

Nehmen wir einmal an, ein Infizierter kommt während seiner ansteckenden Phase mit drei Menschen derart in Kontakt, dass er diese drei Menschen anstecken würde. Dann wäre der Grund-Reproduktionsfaktor $R_0 = 3$. Nun kann es aber sein, dass statistisch gesehen von diesen drei Menschen einer nicht angesteckt werden kann, sei es, weil er die Erkrankung schon hatte, oder sei es, weil er wegen einer Impfung immun gegen die Erkrankung ist. In diesem Fall wäre der aktuelle Reproduktionsfaktor $R = 2$.

Zum Beginn einer Pandemie, wo noch niemand wegen Vorerkrankung oder Impfung immun ist, ist somit $R = R_0$. Mit dem Fortschreiten der Durchseuchung der Bevölkerung beginnt jedoch R nach und nach kleiner als R_0 zu werden, weil es immer häufiger passiert, dass ein potentielles „Infektionsopfer“ schon immun ist. Der Infizierte kann also nicht mehr so viele anstecken, wie zu Beginn der Pandemie.

Auch diesen Reproduktionsfaktor können wir in einen b-Parameter aus der Normalform der Exponentialfunktion umwandeln. Ganz so einfach, wie bei der Halbwertzeit oder der Verdopplungszeit ist es allerdings nicht.



Hätte man 7 Tage nach Beginn der Aufzeichnungen aus dem Beispiel der Corona-Pandemie im vorangegangenen Kapitel (also am 24. März 2020) durch eine geeignete Maßnahme den exponentiellen Anstieg in einen abklingenden Anstieg umwandeln können, dann würde sich in etwa der nebenstehend dargestellte Funktionsverlauf für die Anzahl der Infizierten ergeben. Der Anstieg des Wachstums ist jetzt ab dem 7. Tag begrenzt, die Zahl steigt aber dennoch weiter an. Das liegt daran, dass in der Zahl der Infizierten auch noch die Zahl der inzwischen wieder Genesenen enthalten ist. Würde man in einer Funktion nur die **aktuell** Erkrankten darstellen, dann würde die Kurve Richtung Null streben, ähnlich zum Diagramm aus Kapitel 3.1.

Für weitere Überlegungen sollten wir ein paar Annahmen festlegen. Zunächst gehen wir davon aus, dass die Infektionszeit[4] n Tage beträgt. Zur Vereinfachung gehen wir davon aus, dass der Infizierte nach Ablauf dieser Zeit entweder wieder genesen oder gestorben ist. Weiterhin nehmen wir an, dass die Pandemie noch am Anfang steht, also $R \approx R_0$ ist. Nun benenne ich die Zahl der **aktuell** Infizierten zum Zeitpunkt t_0 mit I_0 und die Zahl der **aktuell** Infizierten n Tage später (also nach dem Ablauf einer Infektionsperiode) I_n.

[4] Die Infektionszeit ist die Zeitspanne, innerhalb derer eine Ansteckung anderer Menschen möglich ist.

Damit ist der Reproduktionsfaktor definiert mit:

$$R = \frac{I_n}{I_0}$$

Die allgemeine Funktionsgleichung für die Zahl der aktuell Infizierten lautet:

$$I(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + c$$

Der Parameter c ist Null, das hatten wir schon geklärt. Bleibt also nur noch der Parameter a und b zu bestimmen.

Starten wir unsere Funktion, mit der wir die Zahl der aktuell Infizierten darstellen wollen, zum Zeitpunkt $t = 0$, dann ist der Term $e^{b \cdot 0} = 1$, denn es ist $e^0 = 1$. Somit ist für den Zeitpunkt $t = 0$::

$$I(0) = I_0 = a \cdot e^0 + 0 = a$$

Zusammengefasst: $a = I_0$.

Aus der Definitionsgleichung für den Reproduktionsfaktor erhalten wir durch Gleichungsumstellung die Zahl der Infizierten nach n Tagen, also I_n:

$$I_n = R \cdot I_0$$

Das setzen wir in die Funktionsgleichung ein.

$$I(n) = I_n = R \cdot I_0 = I_0 \cdot e^{b \cdot n}$$

Zusammengefasst ist das:

$$R \cdot I_0 = I_0 \cdot e^{b \cdot n}$$

Wir formen die Gleichung nach b um:

$$\begin{array}{rcll} R \cdot I_0 & = & I_0 \cdot e^{b \cdot n} & |:I_0 \\ R & = & e^{b \cdot n} & |\ln \ldots \\ \ln R & = & b \cdot n & |:n \\ \dfrac{\ln R}{n} & = & b & \end{array}$$

Wir haben gelernt, dass der Parameter b darüber entscheidet, ob die Funktion exponentiell ansteigt oder abklingt. R und n sind **positive** Zahlen. Der einzige Term in der eben hergeleiteten Formel, der **negativ** werden kann, ist der Logarithmus $\ln R$. Bekanntlich ist der Logarithmus (zu einer beliebigen Basis größer als 1) von 1 gleich Null. Für Werte $R > 1$ ist er **positiv**, im Bereich $0 < R < 1$ **negativ**. Wir können das als Ergebnis zusammenfassen:

Solange der Reprodunktionsfaktor R kleiner als 1 bleibt, klingt die Pandemie ab.

4 Beispiele

4.1 Beispiel 1

Am 17. März 2020 gab es in Deutschland etwa 6 000 Menschen, die mit dem Coronavirus infiziert waren. Damals verdoppelt sich die Zahl der Infizierten alle 4 Tage. An welchem Tag hätte man 10 000 000 Infizierte in Deutschland gehabt, wenn man keine Maßnahmen ergriffen hätte, um die Infektionsrate zu verringern?

Lösung: Die Basis für alle Berechnungen ist die Funktionsgleichung in Normalform:

$$I(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + c$$

Ich gehe von $c = 0$ aus, weil es hinreichend lange vor dem 17. März keine Infizierten gab. Mathematisch ausgedrückt sieht das so aus: $\lim\limits_{t \to -\infty} I(t) = 0$. Als Funktionsgleichung bleibt demnach:

$$I(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$$

Den Start-Zeitpunkt mit $t = 0$ lege ich auf den 17. März. Setzte ich in dieser Funktionsgleichung $t = 0$ ein, dann erhalte ich die Zahl der Infizierten am 17. März, also 6 000.

$$\begin{aligned} I(0) &= 6\,000 \\ a \cdot e^{b \cdot 0} &= 6\,000 \\ a \cdot 1 &= 6\,000 \\ a &= 6\,000 \end{aligned}$$

Hiermit ist der Parameter a bekannt. Die weiter konkretisierte Funktionsgleichung sieht damit so aus:

$$I(t) = 6\,000 \cdot e^{b \cdot t}$$

Jetzt muss nur noch der Parameter b bestimmt werden. Dafür verwenden wir die angegebene Verdopplungszeit (in der Einheit *Tage*) von $t_D = 4$. Setze ich t_D für t in die Funktionsgleichung ein, dann erhält als Ergebnis das Doppelte des Startwertes, also $2 \cdot 6\,000$.

$$\begin{aligned} I(t_D) &= 2 \cdot 6\,000 \\ 6\,000 \cdot e^{b \cdot 4} &= 2 \cdot 6\,000 \quad |6\,000 \\ e^{b \cdot 4} &= 2 \qquad\qquad |\ln \ldots \\ b \cdot 4 &= \ln 2 \qquad\quad |:4 \\ b &= \frac{\ln 2}{4} \\ b &= 0{,}173 \end{aligned}$$

Damit ist die komplette Funktionsgleichung bekannt:

$$I(t) = 6\,000 \cdot e^{0{,}173 \cdot t}$$

Es ist zunächst die Zeit gesucht, bis der Funktionswert auf $I = 10\,000\,000$ angestiegen ist. Diese Zeit nenne ich t_x.

$$\begin{aligned}
I(t_x) &= 10\,000\,000 \\
6\,000 \cdot e^{0{,}173 \cdot t_x} &= 10\,000\,000 && |:6\,000 \\
e^{0{,}173 \cdot t_x} &= \frac{10\,000\,000}{6\,000} \\
e^{0{,}173 \cdot t_x} &= 1\,667 && |ln\ldots \\
0{,}173 \cdot t_x &= \ln 1\,667 && |:0{,}173 \\
t_x &= \frac{\ln 1\,667}{0{,}173} \\
t_x &= 42{,}9
\end{aligned}$$

Das sind knapp 43 Tage. Jetzt muss man nur noch vom 17. März 43 Tage weiterzählen und kommt so zum 29. April. Zusammengefasstes Ergebnis:

Ohne Gegenmaßnahmen der Regierung hätte die Zahl der Infizierten
am 29. April die Grenze von 10 Millionen überschritten.

4.2 Beispiel 2

Am 25. März 2020 betrug die Zahl der Infizierten 31 500, am 26. März waren es 42 500. An welchem Tag hat sich die Zahl der Infizierten gegenüber dem 25. März verdoppelt, wenn der Anstig in gleicher Weise ansteigt?

Lösung: Es gibt hier mehrere Möglichkeiten der Vorgehensweise, von denen ich eine beispielhaft vorstellen möchte.

Die Basis für die Berechnungen ist die Funktionsgleichung in Normalform:

$$I(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + c$$

Wie bereits erwähnt, kann man davon ausgehen, dass der Parameter $c = 0$ ist. Als Funktionsgleichung bleibt demnach:

$$I(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$$

Den Start-Zeitpunkt mit $t = 0$ lege ich auf den 25. März. Setzte ich in dieser Funktionsgleichung $t = 0$ ein, dann erhalte ich die Zahl der Infizierten am 25. März, also 31 500.

$$\begin{aligned}
I(0) &= 31\,500 \\
a \cdot e^{b \cdot 0} &= 31\,500 \\
a \cdot 1 &= 31\,500 \\
a &= 31\,500
\end{aligned}$$

Hiermit ist der Parameter a bekannt. Die weiter konkretisierte Funktionsgleichung sieht damit so aus:

$$I(t) = 31\,500 \cdot e^{b \cdot t}$$

Jetzt muss nur noch der Parameter b bestimmt werden. Dafür verwenden wir die Werte vom 26. März, also dem Zeitpunkt $t = 1$.

$$\begin{aligned}
I(1) &= 42\,500 \\
31\,500 \cdot e^{b \cdot 1} &= 42\,500 \\
31\,500 \cdot e^{b} &= 42\,500 \qquad | : 31\,500 \\
e^{b} &= \frac{42\,500}{31\,500} \qquad | \ln \ldots \\
b &= \ln \frac{42\,500}{31\,500} \\
b &= 0{,}299\,517
\end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$I(t) = 31\,500 \cdot e^{0{,}299\,517 \cdot t}$$

Mit dieser Funktionsgleichung kann nun die Frage gelöst werden, wie groß die **Verdopplungszeit** t_D ist. Setzt man t_D für t in die Funktionsgleichung ein, dann muss man als

Ergebnis das Doppelte der Anzahl vom 25. März erhalten. Mit diesem Ansatz kann dann t_D bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcll} I(t_D) & = & 2 \cdot 31\,500 & \\ 31\,500 \cdot e^{0{,}299\,517 \cdot t_D} & = & 2 \cdot 31\,500 & \mid : 31\,500 \\ e^{0{,}299\,517 \cdot t_D} & = & 2 & \mid \ln \ldots \\ 0{,}299\,517 \cdot t_D & = & \ln 2 & \mid : 0{,}299\,517 \\ t_D & = & \dfrac{\ln 2}{0{,}299\,517} & \\ t_D & = & 2{,}314 & \end{array}$$

Ende März 2020 verdoppelte sich die Anzahl der Infizierten etwa alle 2,3 Tage.

4.3 Beispiel 3

Ende März sagte Frau Merkel:„*Wir müssen die Verdopplungszeit auf mindestens 12 bis 14 Tage erhöhen, bevor wir Entwarnung geben können.*“

Bewerten Sie diese Aussage von Frau Merkel!

Lösung: So lange es noch eine Verdopplungszeit gibt, hat die Wachstumsfunktion noch einen positiven Wert für den Parameter b. Daher haben wir immer noch **Exponentielles Wachstum**, auch wenn der Anstieg (zunächst) nicht mehr so steil ist. Eine hinreichende Zeit später wird er aber wieder steil und immer steiler. Von Entwarnung kann damit also **keinesfalls** die Rede sein. Der Kollaps kommt dann nur etwas später. *(Wussten Sie, dass Frau Merkel einen Doktortitel hat, den sie im Fach Physik erworben hat?)*

4.4 Beispiel 4

Mitte April sagte Frau Merkel:„*Wenn der Reproduktionsfaktor dauerhaft kleiner als 1 bleibt, können wir die restriktiven Maßnahmen lockern.*“

Bewerten Sie diese Aussage von Frau Merkel!

Lösung: Ein Reproduktionsfaktor zwischen 0 und 1 bedeutet, dass der Parameter b in der Exponentialfunktion **negativ** ist. Das bedeutet, es gibt keinen Wachstumsvorgang, sondern einen **Abklingvorgang**. Derhalb können wir hier Frau Merkel beipflichten.

4.5 Beispiel 5

Am 8. April 2020 gab es in Deutschland 4 200 neu Infizierte. Am 24. April waren es nur 1 900. Wir groß ist der durchschnittliche Reproduktionsfaktor R, wenn man von einer Infektionszeit von 14 Tagen ausgeht?

Lösung: Zunächst bestimme ich die Parameter a und b in der Grundformel:

$$I(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$$

(Dass $c = 0$ ist, habe ich hier schon aus den bereits besprochenen Gründen vorausgesetzt.) Dazu lege ich den Zeitpunkt $t = 0$ auf den 8. April. Dass dadurch die Zahl der neu Infizierten am 8. April den Parameter a darstellt, wurde schon gezeigt. Die Funtionsgleichung lautet dann:

$$I(t) = 4\,200 \cdot e^{b \cdot t}$$

Vom 8. April bis zum 24. April vergehen 16 Tage. Wenn ich also für $t = 16$ einsetze, dann erhalte ich als Funktionswert die Zahl der neu Infizierten vom 24. April.

$$\begin{array}{rcll}
I(16) &=& 1\,900 & \\
4\,200 \cdot e^{b \cdot 16} &=& 1\,900 & |:4\,200 \\
e^{b \cdot 16} &=& \dfrac{1\,900}{4\,200} & \\
e^{b \cdot 16} &=& 0{,}452 & |\ln\ldots \\
b \cdot 16 &=& \ln 0{,}452 & |:16 \\
b &=& \dfrac{\ln 0{,}452}{16} & \\
b &=& -0{,}0496 &
\end{array}$$

In dem Kapitel über den Reproduktionsfaktor haben wir schon die Formel kennen gelernt:

$$R \cdot I_0 = I_0 \cdot e^{b \cdot n}$$

Mit $n = 14$ (und $I_0 = 4\,200$) sowie dem eben bestimmten b-Wert kann R ausgerechnet werden.

$$\begin{array}{rcll}
R \cdot I_0 &=& I_0 \cdot e^{b \cdot n} & |:I_0 \\
R &=& e^{b \cdot n} & \\
&=& e^{-0{,}0496 \cdot 14} & \\
R &=& 0{,}499 &
\end{array}$$

$\boxed{\text{Die Reproduktionsrate betrug Mitte April etwa } R = 0,5.}$

4.6 Ein Beispiel aus einem anderen Bereich

Je älter eine Frau ist, die ein Kind bekommt, desto größer ist das Risiko, dass das Kind ein Down-Syndrom hat. Der Zusammenhang des Alters x (in Jahren) der werdenden Mutter und dem Risiko r (in Prozent) für ein Down-Syndrom des Kindes kann näherungsweise durch diese Funktion dargestellt werden:

$$r = f(x) = 0{,}000\,017 \cdot e^{0{,}2745 \cdot x} + 0{,}08$$

a) Eine Frau bekommt mit 33 Jahren ihr erstes Kind. Wie groß ist das Risiko dafür, dass das Kind ein Down-Syndrom hat?

b) Eine andere Frau möchte aus beruflichen Gründen mit dem ersten Kind lieber noch etwas warten. In welchem Alter sollte sie das Kind bekommen, damit das Risiko für ein Down-Syndrom höchstens doppelt so groß ist, wie für die erste Frau?

Lösung:

Teil a) Hier muss nur für x die 33 für das Alter der Frau eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} r &= 0{,}000\,017 \cdot e^{0{,}2745 \cdot x} + 0{,}08 \\ &= 0{,}000\,017 \cdot e^{0{,}2745 \cdot 33} + 0{,}08 \\ r &= 0{,}226 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Das Risiko für ein Down-Syndrom liegt bei 0,226\%.}}$$

Teil b) Das Doppelte von 0,226% sind 0,452%. Dieser Wert wird für r eingesetzt. Damit kann x bestimmt werden.

$$\begin{aligned} 0{,}452 &= 0{,}000\,017 \cdot e^{0{,}2745 \cdot x} + 0{,}08 && \mid -0{,}08 \\ 0{,}372 &= 0{,}000\,017 \cdot e^{0{,}2745 \cdot x} && \mid :0{,}000\,017 \\ 21\,882 &= e^{0{,}2745 \cdot x} && \mid \ln \ldots \\ \ln 21\,882 &= 0{,}2745 \cdot x && \mid :0{,}2745 \\ \frac{\ln 21\,882}{0{,}2745} &= x \\ x &= 36{,}4 \end{aligned}$$

Mit 36,4 Jahren verdoppelt sich das Risiko gegenüber einer 33-jährigen Frau. Die Differenz sind 3,4 zusätzliche Jahre.

$$\boxed{\text{Die Frau kann noch 3,4 Jahre warten, bis sich das Risiko verdoppelt.}}$$