Hinweise zur Kurvendiskussion

Was gehört alles zu einer Kurvendiskussion dazu?

1. Bestimmung des Definitionsbereiches (meist $D = \mathbb{R}$, bei Gebrochen Rationalen Funktionen: $D = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}$
2. Nur bei Gebrochen Rationalen Funktionen:
   a) Untersuchung auf Polstellen und Lücken (y-Werte nicht vergessen!)
   b) Bestimmung der Asymptote
3. Bestimmung der Achsenschnittpunkte ($x_{01}, x_{02}, \ldots, y_0$)
4. Bestimmung von Hoch-, Tief- und Sattelpunkten (y-Werte nicht vergessen!)
5. Bestimmung der Wendepunkte (y-Werte nicht vergessen!)
6. Anfertigung einer Skizze (einen sinnvollen Maßstab verwenden, kann für die x-Achse und die y-Achse unterschiedlich sein!)

Hier eine komplette Kurvendikussion als Beispiel

Untersucht werden soll die Funktion: $\mathrm{f}(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1. **Definitionsbereich:** Es gibt keinerlei Einschränkungen für den Definitionsbereich, daher: $\boxed{D = \mathbb{R}}$

2. Untersuchung auf Polstellen und Lücken sowie Bestimmung der Asymptote entfällt, da $\mathrm{f}(x)$ **keine** Gebrochen Rationale Funktion ist.

3. **Achsenschnittpunkte:** Den Schnittpunkt mit der y-Achse finden wir, indem wir den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ berechnen:

$$y_0 = f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{y_0 = 0}$$

Die Schnittstellen mit der x-Achse erhalten wir, indem wir untersuchen, für welche x-Werte der Funktionswert gleich 0 ist.

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 = 0 \quad |x_0 \text{ ausklammern!}$$

$$x_0 \cdot (x_0^2 - 6x_0 + 9) = 0$$

Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktor 0 ist, also:

$$x_{01} = 0 \text{ oder: } (x_0^2 - 6x_0 + 9) = 0$$

Die rechte Gleichung lösen wir mit der p-q-Formel:

$$x_{02/3} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 9}$$

$$x_{02} = 3$$

$$\text{Zusammengefasst: } \boxed{x_{01} = 0 \quad x_{02} = 3}$$

4. **Extremwerte:** Notwendige Bedingung für Extremstellen ist: $\mathrm{f}'(x_E) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\
3x_E^2 - 12x_E + 9 &= 0 \quad | : 3 \\
x_E^2 - 4x_E + 3 &= 0 \\
x_{E1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\
x_{E1} &= 1 \quad \text{und:} \\
x_{E2} &= 3
\end{aligned}$$

Nun muss untersucht werden, was an diesen beiden Stellen genau vorliegt. Das geschieht am besten mit der zweiten Ableitung, die wir bestimmen:

$$f''(x) = 6x - 12$$

Was ist an der Stelle $x_{E1} = 1$ los?

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{ Hochpunkt bei } x_{E1} = 1$$

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$$

Ergebnis: Es gibt einen Hochpukt bei: $\boxed{H(1|4)}$

Was ist an der Stelle $x_{E2} = 3$ los?

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = +6 > 0 \Rightarrow \text{ Tiefpunkt bei } x_{E2} = 3$$

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$$

Ergebnis: Es gibt einen Tiefpukt bei: $\boxed{T(3|0)}$

5. **Wendepunkte:** Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist: f$''(x_W) = 0$

$$\begin{aligned} 6x_W - 12 &= 0 \quad | + 12 \\ 6x_W &= 12 \quad | : 6 \\ x_W &= 2 \end{aligned}$$

Nun muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt. Das geschieht am einfachsten mit der dritten Ableitung, die wir bilden:

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(x_W) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_W = 2$$

$$y_W = f(x_W) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2$$

Ergebnis: Es gibt einen Wendepukt bei: $\boxed{\text{W}(2|2)}$

6. **Skizze**